Orbitalni metod u dinamici plazme

9

Uvodne napomene

- “Aproksimacija zadanih polja” – izračunavanje putanje naelektrisanih čestica u zadanim, spoljašnjim električnim i magnenim poljima.
- Ovaj metod je primenljiv jedino kod razređene plazme kod koje se može očekivati da će se *kolektiv* naelektrisanih čestica ponašati po istim zakonima kao i *izolovana* čestica.
- Kod razređene plazme je dopušteno zanemariti mikroskopsko elektromagneno polje koje potiče od samih čestica i smatrati da se svaka ponaosob kreće nezavisno od ostalih u poznaim spoljašnjim poljima.

Polazne jednačine

- Polazna jednačina kretanja naelektrisane čestice mase *m* i naelektrisanja *e*

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\left[\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\left(\mathbf{r},t\right)\right] + \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t\right)$$

  gde su **E**(**r**,t) i **B**(**r**,t) električno i magnetno polje, a **F**(**r**,**v**,t) je rezultanta svih sila nelektromagnetne prirode od interesa u datom problemu.

- Vektori **E**(**r**,t), **B**(**r**,t) i **F**(**r**,**v**,t) se smatraju zadanim funkcijama svojih argumenata.
- Nepoznata veličina je vektorska funkcija **r**(t), vektor položaja posmatrane naelektrisane čestice.

Maksvel-ove jednačine

- Zadana polja **E**(**r**,t) i **B**(**r**,t), u kojima se kreću posmatrane naelekrisane čestice, potiču od izvesnih *spoljašnjih* naelektrisanja i struja.
- U oblasti u kojoj se kretanje vrši, gustine ovih spoljašnjih naelektrisanja i struja su po pravilu jednake nuli.
- Maksvel-ove jednačine za električno i magnetno polje kod orbitalnog metoda postaju:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \mathrm{rot}\mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Neki specijalni slučajevi

- Kretanje u stacionarnom (ali ne nužno i homogenom) magnetnom polju:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\,\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

- Za domaći: *Pokazati da kinetička energija čestice (prema tome i intenzitet njene brzine) ostaje konstantna u stacionarnom magnetnom polju.*

$$W = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 \qquad \frac{dW}{dt} = 0$$

- *Zaključak: Da bi se nalektrisanoj čestici promenila kinetička energija, potrebno je ili prisustvo dopunske sile (električne ili nelektromagnetne) ili nestacionarno magnetno polje.*

Kretanje naelektrisane čestice u stacionarnom i slabo nehomogenom magnetnom polju

- *Uticaj nehomogenosti se može tretirati kao perturbacija (vrlo malog intenziteta)*:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\,\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

- Kinetička energija čestice koja se kreće u skladu s ovom jednačinom ne mora ostati konstantna u toku kretanja.

Kretanje naelektrisane čestice u visokofrekventnom električnom polju

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\exp\left(i\omega t\right)$$

- Visokofrekventno električno polje frekvencije ω indukuje i magnetno polje,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}_0(\mathbf{r})\exp\left(i\omega t\right)$$

  tako da se dobija jednačina kretanja u obliku:

$$m\ddot{\mathbf{r}}=e\left[\mathbf{E}_\mathbf{0}(\mathbf{r})+\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}_\mathbf{0}(\mathbf{r})\right]e^{i\omega t}$$

- Integracije ove jednačine, tj. izračunavanje **r**(t) na osnovu poznatih **E**(r,t) i **B**(r,t) je veoma složen problem (analitička rešenja su dobijena samo u malom broju slučajeva).

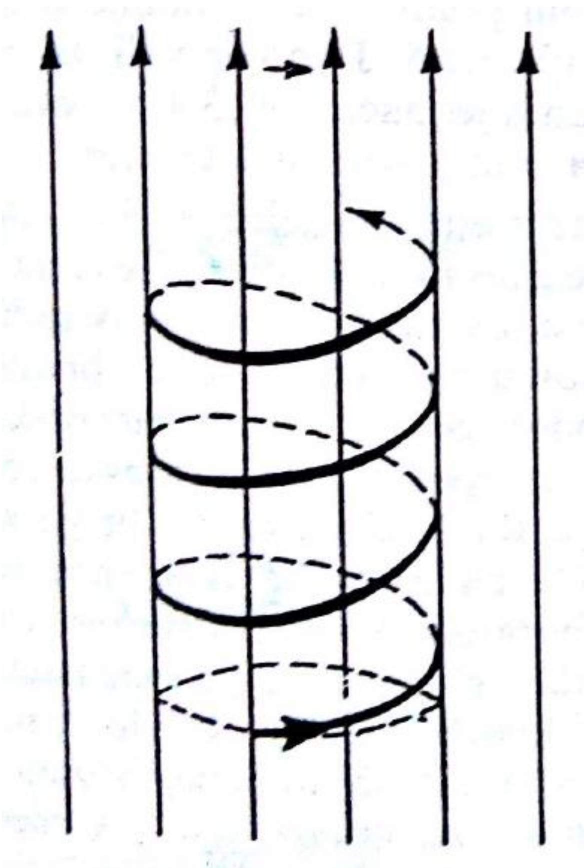
Aproksimacija vodećeg centra

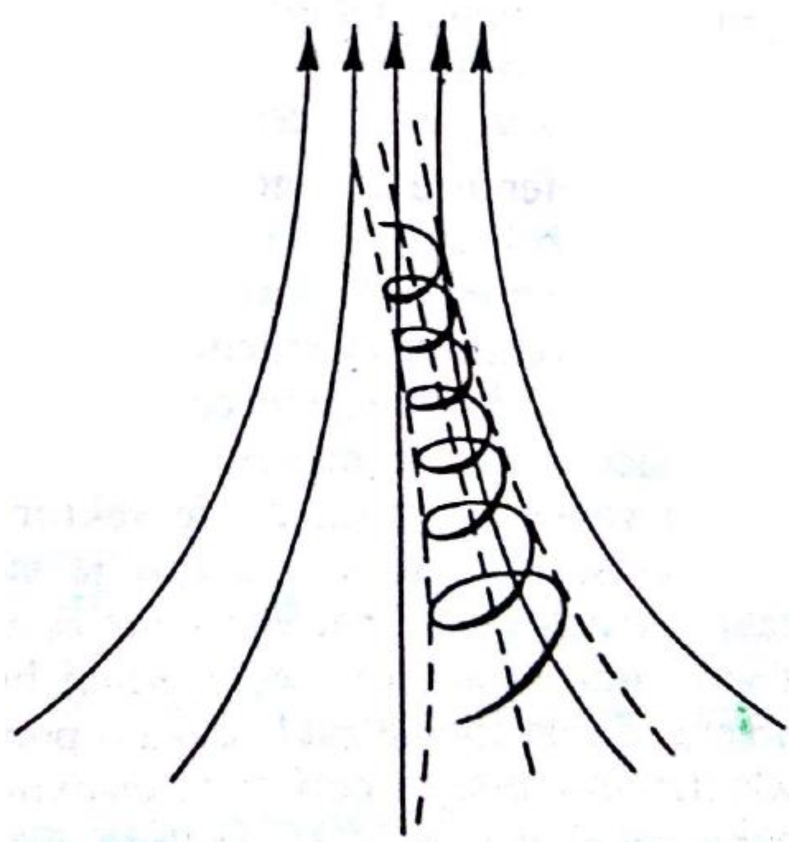
- Analiza kretanja u stacionarnom i slabo nehomogenom magnetnom polju:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

- (a) u stacionarnom i homogenom magnetno polju trajektorija elektrona je zavojnica čija se osa poklapa sa magnetnom linijom sile (*“vodeća linija sile”)* , čiji je hod konstantan kao i poluprečnik – ovo kretanje se naziva ***ciklotronska rotacija.***
- (b) u slučaju stacionarnog slabo nehomohenog magnetnog polja, trajektorija je približno zavojnica, ali se njena osa ne poklapa sa magnetnom linijom sile – čestica ***“driftuje”*** sa jedne vodeće magnetne linije sila na drugu. Hod i radijus ove zavojnice ne ostaju konstantni.

Trajektorija elektrona





<u>Zaključak</u>

- U izvesnim slučajevima kretanje naelektrisane čestice ima takav karakter da je *moguće naći jedan sistem reference* (ne nužno inercijalni) *u kome će njena trajektorija biti kružnica* (ili vrlo približno kružnica)*, tj. u kome će se kretanje svesti na čistu* (ili vrlo približno čistu) <u>*ciklotronsku rotaciju*</u>*.*
- Kretanja kod kojih je moguće naći ovakav sistem reference kažemo da imaju ***driftni*** karakter, i trenutni centar ciklotronske rotacije se naziva ***vodeći centar***.
- Koji je to sistem?

Analiza kretanja naelektrisane čestice u sistemu vezanom za vodeći centar

- U sistemu vezanom za v.c.:
  - Kretanje je čista ciklotronska rotacija, po kružnici čiji se poluprečnik zove *Lramor-ov* radijus, sa frkevencom koja se naziva *ciklotronska frekvenca* (ove veličine su određene lokalnom vrednošću magnetnog polja i brzinom kretanja čestice u sistemu vezanom za vodeći centar).
- U lab. sistemu:
  - U najvecem broju slučajeva Larmorov radijus je vrlo mali, a ciklotronska frekvencija vrlo visoka, tako da se kretanje naelektrisane čestice u lab. sistemu reference svodi na vrlo brzu rotaciju u neposrednoj blizini vodećeg centra koji se srazmerno sporo pomera.

nastavak

- Za izvođenje zaključka o ponašanju i kretanju skupa od vrlo velikog broja naelektrisanih čestica pod ovim uslovima, očevidno nisu bitni detalji vezani za ciklotronsku rotaciju i *može se smatrati da je sva potrebna informacija o kretanju čestice sadržana u podacima o kretanju njenog vodećeg centra.*
- Indetifikacija čestice sa njenim vodećim centrom i sastavljanje diferenceijalne jednačine kretanja ovoga na osnovu jednačine

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$$

pod uslovom da kretanje ima driftni karakter naziva se *aproksimacija vodećeg centra ili driftna aproksimacija*.

Kada se može uvesti driftna aproksimacija?

- Spoljašnje magnetno polje se veoma malo menja na rastojanjima reda veličine Larmor-ovog radijusa i u intervalu vremena reda veličine perioda ciklotronske rotacije

$$\left|\rho_L \frac{d\ln B}{dx}\right| \ll 1 \qquad \left|\frac{1}{\omega_B}\frac{d\ln B}{dt}\right| \ll 1$$

gde su ρ_L i ω_B Larmor-ov radijus i ciklotronska frekvencija, respektivno.

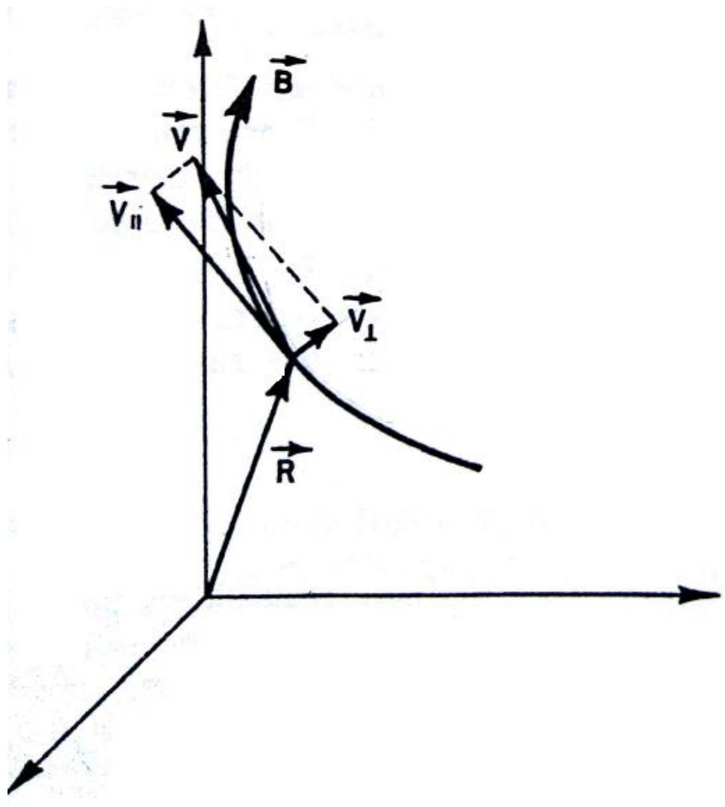
Brzina vodećeg centra

- Brzinu vodećeg centra **V** u lab. sistemu reference možemo razložiti na dve komponente, u pravcu magnetnog polja i normalno na njega:

$$\mathbf{V} \equiv \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}_{\|} + \mathbf{V}_{\perp}$$

$$\mathbf{V}_{\|} = \mathbf{v}_{\|}$$

- $\mathbf{V}_{\perp} = \mathbf{V}_D$ - <u>brzina drifta</u>
- U sistemu vezanom za v.c.:



$$\mathbf{v}_{\|}^{*} = 0$$

$$\mathbf{v}_{\perp}^{*} = \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{V}_D$$

$$\mathbf{E}^{*} = \mathbf{E} + \mathbf{V}_D \times \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}^{*} = \mathbf{B}$$

Zaključak

- U slučaju kretanja koje ima driftni karakter, brzina kretanja čestice u lab. sistemu se može razložiti na tri komponente, od kojih je jedna vezana za kretanje čestice paralelno linijama sila magnetnog polja, druga za ciklotronsku rotaciju, a treća za drift.

$$\mathbf{v}_{\parallel} \quad \mathbf{v}_{\perp}^{*} \quad \mathbf{V}_{D}$$

Kretanje naelektrisane čestice u stacionarnom i homogenom magnetnom polju

- Jednačina kretanja

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

$$x = \frac{mv_\perp^0}{eB}\left(1 - \cos\frac{eB}{m}t\right),$$

- Geometrija problema

$$y = \frac{mv_\perp^0}{eB}\sin\frac{eB}{m}t,$$

$$\mathbf{B} = B\vec{\mathbf{e}}_z, \ \vec{\mathbf{v}}_0 = v_\perp^0\vec{\mathbf{e}}_y + v_\parallel^0\vec{\mathbf{e}}_z$$

$$z = v_\parallel^0 t.$$

- Za domaći:
  - Izvesti konačne jednačine kretanja
  - Izvesti jednačinu trajektorije

$$\left(x - \frac{mv_\perp^0}{eB}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{mv_\perp^0}{eB}\right)^2.$$

Analiza

- U konačnm jednačinama kretanja čestice prepoznajemo parametarske jednačine kružne zavojnice čija je osa paralelna sa *z*-osom (pravac magnetnog polja).
- Ova zavojnica leži na kružnom cilindru, čija jednačina se dobija eliminacijom vremena iz konačnih jednačina kretanja.
- Zavojnica seče izvodnice tog cilindra pod konstantnim uglom α

$$tg\alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{||}} = \frac{v_{\perp}^{0}}{v_{||}^{0}}$$

Kretanje u sistemu vodećeg centra

- Sistem reference se kreće duž magnetne linije sile brzinom $v_{\parallel}^{0}$ i čije ose ostaju stalno paralelne osama lab. sistema.
- Konačne jednačine kretanja u ovom sistemu reference, uz uslov

$$B^{*} = B \quad \left(v_{\perp}^{0}\right)^{*} = v_{\perp}^{0}$$

$$x^{*} = x = \frac{mv_{\perp}^{0}}{eB}\left(1-\cos\frac{eB}{m}t\right) = \frac{m\left(v_{\perp}^{0}\right)^{*}}{eB^{*}}\left(1-\cos\frac{eB^{*}}{m}t\right),$$

$$y^{*} = y = \frac{mv_{\perp}^{0}}{eB}\sin\frac{eB}{m}t = \frac{m\left(v_{\perp}^{0}\right)^{*}}{eB^{*}}\sin\frac{eB^{*}}{m}t,$$

$$z^{*} = z - v_{\parallel}^{0}t = 0.$$

Ciklotronska rotacija

- Kretanje u sistemu v.c. je ravnomerno, *ciklotronska rotacija*, sa ugaonom brzinom

$$\frac{eB^*}{m}$$

- Dakle, ciklotonska frekvencija i Larmor-ov radijus su dati formulama

$$\omega_B = \frac{eB^*}{m} \qquad \rho_L = \frac{\left(v_\perp^0\right)^*}{\left|\omega_B\right|}$$